

MATRICES

DE

RED

1. MATRICES DE RED Y DISPERSIDAD

1.1. Formulación y significado de las matrices Y_{BUS} y Z_{BUS} .

Introducción. El objetivo de esta unidad es proporcionar las bases concernientes a las *matrices de red*, que constituyen una herramienta imprescindible en el análisis de los sistemas eléctricos. La teoría al respecto es muy amplia, por lo que aquí nos referiremos únicamente a una introducción que contiene justamente el material que será el antecedente académico, de lo que requerimos para cubrir los temas del curso. El lector interesado puede profundizar en una buena cantidad de literatura al respecto; aquí mencionamos dos títulos como muestra, [1], [2].

A manera de introducción, y con la finalidad de mostrar que , aunque de manera no formal, los cursos de circuitos nos conducen al uso de estas matrices, tomemos como ejemplo la red eléctrica que se muestra en la figura I.1 a continuación, la cual consta de cuatro nodos. Aquí usaremos el término *bus* de manera muy consistente más adelante, el cual es sinónimo del concepto de nodo, término con el cual los estudiantes se familiarizaron en los cursos de circuitos.

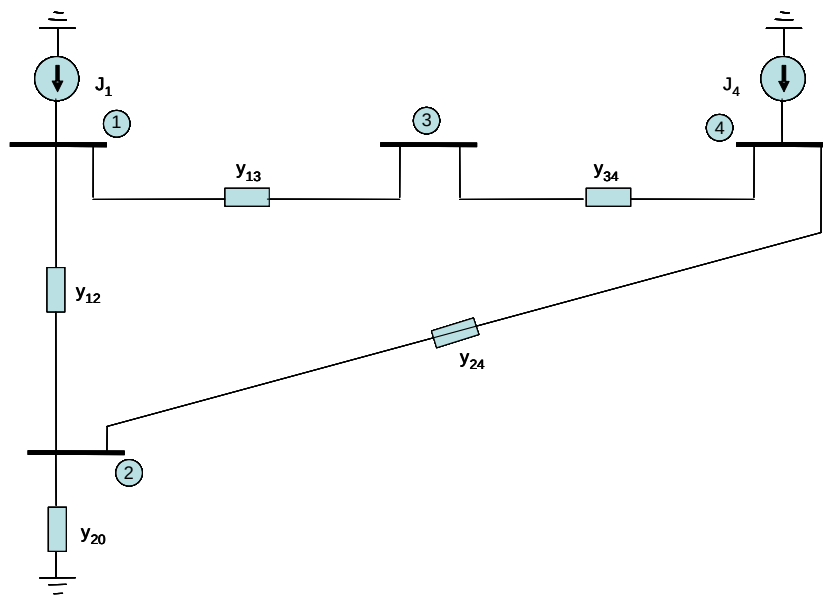


Figura 1.1. Red eléctrica de cuatro nodos.

Si aplicamos LCK (Ley de Corrientes de Kirchhoff) a cada uno de los nodos de dicha red, obtenemos las siguientes ecuaciones,

$$J_1 = y_{12}(V_1 - V_2) + y_{13}(V_1 - V_3) = (y_{12} + y_{13})V_1 - y_{12}V_2 - y_{13}V_3$$

$$0 = y_{12}(V_2 - V_1) + y_{20}(V_2 - 0) + y_{24}(V_2 - V_4) = -y_{12}V_1 + (y_{12} + y_{20} + y_{24})V_2 - y_{24}V_4$$

$$0 = y_{13}(V_3 - V_1) + y_{34}(V_3 - V_4) = -y_{13}V_1 + (y_{13} + y_{34})V_3 - y_{34}V_4$$

$$J_4 = y_{34}(V_4 - V_3) + y_{24}(V_4 - V_2) = -y_{24}V_2 - y_{34}V_3 + (y_{34} + y_{24})V_4$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como se muestra

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ J_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{12} + y_{13}) & -y_{12} & -y_{13} & 0 \\ -y_{12} & (y_{12} + y_{20} + y_{24}) & 0 & -y_{24} \\ -y_{13} & 0 & (y_{13} + y_{34}) & -y_{34} \\ 0 & -y_{24} & -y_{34} & (y_{34} + y_{24}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}.$$

Esta última ecuación es característica del método nodal que se aprendió en las materias de circuitos eléctricos. La matriz de coeficientes es la denominada *matriz de admitancias nodal*, en el argot técnico de los sistemas de potencia, se denomina simplemente Y_{BUS} . Hemos preferido hasta este punto usar J para identificar a las fuentes independientes de corriente conectadas a los nodos; dichas fuentes inyectan corriente al nodo al que están conectadas y por esta razón a dichas corrientes se les denomina, corrientes nodales, como mencionaremos más adelante. En forma más compacta la ecuación anterior se escribe a menudo como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

En el presente ejemplo podemos ver que

$$I_1 = J_1; \quad I_2 = 0; \quad I_3 = 0; \quad I_4 = J_4$$

$$Y_{11} = (y_{12} + y_{13}); \quad Y_{22} = (y_{12} + y_{20} + y_{24}); \quad Y_{33} = (y_{13} + y_{34}); \quad Y_{44} = (y_{34} + y_{24})$$

$$Y_{12} = -y_{12} = Y_{21}; \quad Y_{13} = -y_{13} = Y_{31}; \quad Y_{14} = 0 = Y_{41}$$

$$Y_{23} = 0 = Y_{32}; \quad Y_{24} = -y_{24} = Y_{42}; \quad Y_{34} = -y_{34} = Y_{43}$$

De manera más compacta

$$\underline{I}_{BUS} = [\underline{Y}_{BUS}] \underline{V}_{BUS} \quad (1.1)$$

A partir de la ecuación anterior tenemos

$$\underline{V}_{BUS} = [\underline{Z}_{BUS}] \underline{I}_{BUS} \quad (1.2)$$

de lo cual resulta evidente que

$$[\underline{Z}_{BUS}] = [\underline{Y}_{BUS}]^{-1} \quad (1.3)$$

A esta última matriz se le denomina *matriz de impedancias nodal*, ó simplemente $\underline{Z}_{BUS}$.

Evidentemente lo anterior carece de utilidad mientras no comprendamos los conceptos de estas matrices de red, así como los procedimientos más adecuados para obtenerlas. En lo que sigue estos dos aspectos serán lo que nos ocupe. Empezaremos por establecer algunas definiciones topológicas básicas, requeridas para encontrar una forma de encontrar dichas matrices de red.

1.1.1. MATRICES DE INCIDENCIA Y MATRICES PRIMITIVAS.

En el análisis de las redes eléctricas, nuestro objetivo, la mayoría de los casos, es el análisis de redes compuestas por la interconexión de componentes de dos terminales, que denominaremos aquí simplemente *elementos*. Los puntos de interconexión de éstos se denominan *nodos*, como recordará el estudiante de los cursos de circuitos eléctricos. Como se mencionó anteriormente, en el argot de los sistemas de potencia, el término nodo se sustituye por el de *bus*, como veremos en la siguiente unidad. En la figura I.1, mostramos

un ejemplo de red de elementos de dos terminales, constituida por cuatro nodos ó buses y cinco elementos. Al voltaje a través del elemento se le llamará *voltaje del elemento*, mientras que a la corriente a través de éste, se le denomina *corriente del elemento*.

En el análisis de estas redes se requieren dos componentes fundamentales de información: la información de conectividad de la red, por un lado, y la información de los parámetros de los elementos que conforman la red, por el otro.

Con respecto al primer componente de información requerido, la conectividad de la red, la información requerida comprende únicamente el aspecto de la conectividad, dejando de lado los parámetros de los elementos de la red. Debido a esto, estamos interesados en concentrarnos y enfatizar en las propiedades que tiene que ver de manera exclusiva, con estas propiedades, por lo que es común representar la red con la información más elemental posible, asociada con la conectividad. Esto implica que podemos representar la red eléctrica a través de segmentos que representen los elementos de dicha red, constituyendo lo anterior una figura geométrica que se denomina *gráfico lineal*, y que cuando se le asignan orientaciones se convierte en un *gráfico lineal orientado*. En la figura I.2 se muestra el gráfico lineal orientado correspondiente a la red de la figura I.1, el cual se muestra a continuación.

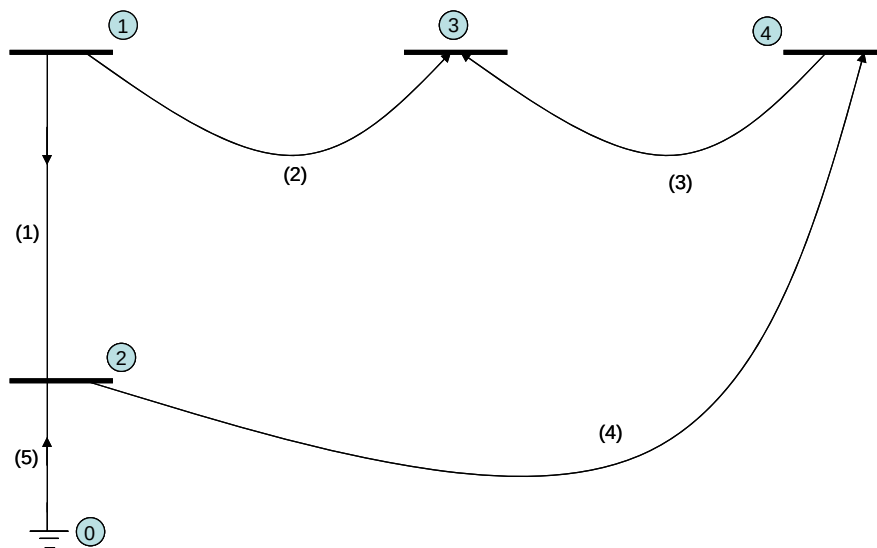


Figura 1.2. Gráfico lineal orientado del sistema de cuatro nodos.

Note que se han utilizado segmentos irregulares para representar los elementos de la red eléctrica, lo cual enfatiza las propiedades topológicas de esta figura, es decir, enfatiza la importancia de la conectividad en este elemento. Además es importante indicar que los números escritos entre paréntesis, indican el número de elemento. Se agrega el número 0 (en un círculo), usado para designar el nodo de referencia.

Matrices de Incidencia.

La conectividad se expresa de manera precisa a través de matrices, dado que además estos elementos matemáticos representan la base del manejo de la información matemático que requerimos, así como la forma más apropiada para desarrollo de los algoritmos. Existen varios tipos de *matrices de incidencia*, que es como se denomina a las matrices que contienen la información de conectividad (un elemento se dice incidente a un nodo, por ejemplo, si aquel está conectado a este); dependiendo del elemento topológico que será la base de la formulación, estas pueden ser matriz de incidencia nodo-elemento, matriz de incidencia elemento-rama, y matriz de incidencia elemento-lazo. Dado que el material de topología de redes que se cubre en este curso, se limita estrictamente a lo que requerimos para el desarrollo de los temas que se cubren en el programa, únicamente nos ocuparemos del primer tipo de matriz de incidencia, esto es, de la matriz de incidencia elemento-nodo.

La matriz de incidencia elemento-nodo, es una matriz que contiene únicamente ceros y unos signados; los unos indican incidencia del elemento al nodo correspondiente, mientras los ceros indican la falta de esta. Por otro lado, debido a que parte de la información de conectividad está asociada con direccionalidad, debemos establecer una convención con respecto a la dirección, de manera similar a como se estableció en el enunciado de las leyes de Kirchhoff. Por lo mencionado entonces definimos la matriz de incidencia mencionada como la matriz A_a de orden $(e \times n)$, donde e representa el número de elementos de la red y n es igual al número de nodos.

$$A_a \begin{cases} (a)_{ij} = +1 & \text{elemento } i \text{ incide con nodo } j \text{ dirigido saliendo del nodo} \\ (a)_{ij} = -1 & \text{elemento } i \text{ incide con nodo } j \text{ dirigido entrando al nodo} \\ (a)_{ij} = 0 & \text{elemento } i \text{ no incide con nodo } j \end{cases}$$

De acuerdo con la definición anterior, tomando como ejemplo el gráfico lineal orientado mostrado en la figura I.2, podemos obtener su *matriz de incidencia aumentada*, denominada así porque contiene explícitamente el nodo de referencia (nodo 0). La matriz de este ejemplo es

$$A_{a(e \times n)} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline (1) & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ (2) & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ (4) & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ (5) & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{array}$$

Debemos notar que cada renglón contiene exactamente dos unos con signos contrarios, por lo que su suma resulta cero. Lo anterior indica que existe redundancia de información, por lo que debemos eliminar una columna para eliminar a su vez este problema. Por esta razón la matriz que resulta de dicha eliminación, es la matriz de incidencia que será usada en el desarrollo de las matrices de red. La columna que se elimina, tiene el mismo efecto que la elección de un nodo como referencia, lo cual se definió por vez primera en el curso de circuitos, durante la formulación del método nodal. Aquí eliminaremos precisamente la información concerniente al nodo 0, que es como vemos en la gráfica, el nodo de referencia. A la nueva matriz simplemente se le denomina matriz de incidencia y es

$$A_{(e \times n-1)} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline (1) & +1 & -1 & 0 & 0 \\ (2) & +1 & 0 & -1 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & -1 & +1 \\ (4) & 0 & +1 & 0 & -1 \\ (5) & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Matrices primitivas.

En lo que concierne a la información de la naturaleza de los elementos de la red, es decir, los valores de sus parámetros, en el caso de elementos pasivos, y los valores de las

variables que caracterizan a las fuentes, fundamentalmente, debemos establecer otras definiciones.

Una red eléctrica, como se mencionó antes, es en esencia una interconexión de componentes de dos terminales. Un conjunto de esas componentes cuando *no están conectadas* se denomina *red primitiva*. A cada componente de esta red se le llamará entonces *elemento primitivo*. El elemento general primitivo se muestra en la figura 1.3.

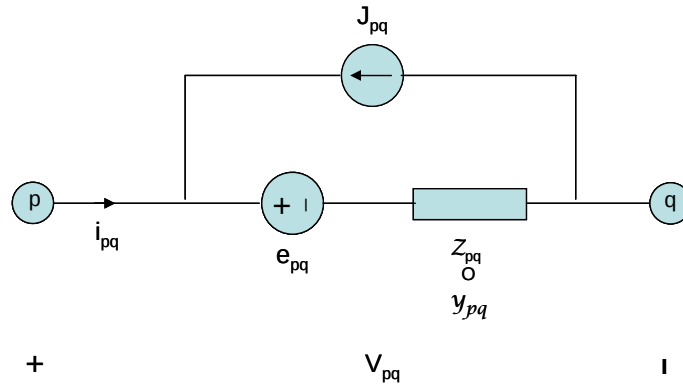


Figura 1.3. Elemento primitivo.

Por supuesto que cada uno de estos elementos primitivos tiene su gráfico orientado, y en el caso del mostrado en la figura 1.3, le corresponderá el suyo, que se muestra en la figura 1.4.

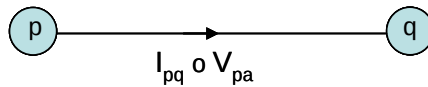


Figura 1.4. Gráfico orientado del elemento primitivo.

Las relaciones que caracterizan a estos elementos son:

$$\text{Forma de impedancia: } v_{pq} - e_{pq} = z_{pq} (i_{pq} + J_{pq}) \quad (1.4)$$

$$\text{Forma de admitancia: } i_{pq} + J_{pq} = y_{pq} (v_{pq} - e_{pq}) \quad (1.5).$$

Las direcciones asociadas de referencia de i_{pq} y v_{pq} pueden codificarse de manera conveniente en términos del gráfico orientado que se muestra en la figura 1.4. Dicho gráfico junto con las relaciones terminales (1.4) y (1.5), describen completamente al elemento de dos terminales. Este elemento constituye una generalización, que se puede adaptar para representar de manera adecuada cualquier caso. Mostramos algunos casos especiales que se pueden presentar:

Elemento pasivo: $J_{pq} = 0; e_{pq} = 0$ $v_{pq} = z_{pq} i_{pq}$ o $i_{pq} = y_{pq} v_{pq}$

Fuente de voltaje

en serie con

impedancia $J_{pq} = 0$ $v_{pq} = z_{pq} i_{pq} + e_{pq}$ (1.6)

Fuente de corriente

en paralelo con

admitancia $e_{pq} = 0$ $i_{pq} = y_{pq} v_{pq} - J_{pq}$ (1.7)

Fuente de voltaje $J_{pq} = 0; z_{pq} = 0$ $v_{pq} = e_{pq}$ *especificado*

Fuente de corriente $e_{pq} = 0; y_{pq} = 0$ $i_{pq} = J_{pq}$ *especificado*.

Los dos últimos casos corresponden a fuentes ideales.

Matrices primitivas de impedancia y admitancia.

Consideremos una red de componentes interconectados; a través de transformaciones de la red, podemos tener elementos de los tres primeros tipos mostrados arriba. Así como buscamos expresar en forma matricial la información de conectividad, buscamos representar a través de matrices también la información concerniente a la red primitiva.

Las ecuaciones que escribimos anteriormente para un elemento primitivo, (1.4) y (1.5), se generalizan para el caso red primitiva como sigue,

$$\underline{v} = [z]\underline{i} + [z]\underline{j} + \underline{e} \quad (\text{Forma de impedancia}) \quad (1.8)$$

$$\underline{i} = [y]\underline{v} - [y]\underline{e} - \underline{j} \quad (\text{Forma de admitancia}) \quad (1.9)$$

donde $[z]$ y $[y]$ son la matriz primitivas de impedancias y la matriz primitiva de admitancias, respectivamente; mientras $\underline{v}$ e $\underline{i}$ son los vectores de voltajes y corrientes de elemento, y finalmente $\underline{e}$ y $\underline{j}$ son los vectores de fuentes de voltaje y de corriente, respectivamente. Si la red es enteramente pasiva, entonces $\underline{j} = \underline{e} = 0$. Además $[z] = [y]^{-1}$.

Las matrices $[z]$ y $[y]$ serán diagonales, si la red está desacoplada magnéticamente; en caso contrario, las matrices mencionadas no serán simétricas. Además el orden de dichas matrices es $(e \times e)$, mientras que el orden de los vectores es $(e \times 1)$.

Para el ejemplo que hemos venido usando, asignamos los siguientes valores a las admitancias de los elementos: $y_{13} = y_{34} = y_{12} = y_{20} = 2 \Omega^{-1} = 0.5 \Omega$, $y_{24} = 1 \Omega^{-1}$.

De acuerdo con estos valores la matriz primitiva de admitancias es

$$[y] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Mientras que la matriz primitiva de impedancias es

$$[z] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Observe que el orden de los valores en la matriz, es el asociado con el código elegido para numerar los elementos, el cual se muestra en el gráfico lineal, que para nuestro ejemplo es

la figura 1.2. En caso de existir acoplamientos, los valores asociados con dichos acoplamientos aparecerán en la matriz primitiva correspondiente. Por ejemplo, supongamos que existe un acoplamiento de $0.5 \Omega^{-1}$ entre los elementos (1) y (2), entonces en las posiciones (1,2) y su transpuesto (2,1), aparecerá el valor de la admitancia de acoplamiento, es decir $0.5 \Omega^{-1}$.

1.1.2 OBTENCION DE Y_{BUS} POR TRANSFORMACIONES SINGULARES.

La definición de las matrices de red requiere de certeza y formalidad, lo cual lo dan las definiciones matemáticas. Este es el caso de la definición de Y_{BUS} por transformaciones singulares, nombre asignado debido a que se trata de una transformación lineal que involucra a la matriz A , que debido a sus dimensiones, en general no cuadrada, es una matriz que no tiene definida inversa.

Los elementos incidentes al nodo de un gráfico lineal forman un conjunto incidente; por ejemplo los elementos (2), (4) y (5) forman el conjunto incidente del nodo 2, en el gráfico correspondiente al ejemplo que venimos usando. Entonces un gráfico con n nodos, tiene igual número de conjuntos incidentes. Podemos escribir LCK para cada uno de los nodos fundamentales (referencia excluido), expresando dicha ley en forma generalizada a través de la transformación lineal $A^T \underline{i} = \underline{0}$. Lo anterior es evidente si tomamos en cuenta que la matriz A , proporciona información de incidencia de elementos-nodos, por lo que el producto indicado a la izquierda de la expresión anterior, nos proporciona la incidencia de corrientes de elemento a nodos, a través de su suma, lo cual se convierte en la LCK.

Podemos desarrollar dicho producto para el ejemplo que nos ocupa

$$A^T \underline{i} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

desarrollamos el producto mostrado y obtenemos

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= 0 \\ -i_1 + i_4 - i_5 &= 0 \\ -i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 &= 0 \end{aligned}$$

lo cual se puede comprobar con referencia a la figura 1.2, correspondiente al gráfico lineal orientado de la red eléctrica del ejemplo. Recordemos que la convención usada es la que comúnmente se usa en los libros de circuitos eléctricos, es decir, corrientes saliendo del nodo se consideran positivas, mientras que si llegan al nodo se consideran negativas. Lo anterior es evidentemente LCK.

Por otro lado podemos probar que $A^T \tilde{J} = \tilde{I}_{BUS}$, dado que si seguimos el mismo razonamiento que usamos arriba, vemos que esta transformación lineal nos da un vector de orden $(nx1)$, cuyas componentes serán la corriente neta inyectada a cada nodo. De forma similar podemos comprobar que $\tilde{V} = AY_{BUS}$, lo cual implica que la transformación lineal a la derecha de la expresión anterior, describe los voltajes de elemento en función de los voltajes nodales. Para el ejemplo que venimos manejando tenemos,

$$AY_{BUS} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_2 \\ V_1 - V_3 \\ V_4 - V_3 \\ V_2 - V_4 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \tilde{V}.$$

Para desarrollar la definición por transformaciones singulares de Y_{BUS} , partimos de la ecuación (1.7), que en forma matricial resulta $\tilde{I} + \tilde{J} = [y]\tilde{V}$. Si sustituimos la expresión mostrada arriba, obtenemos

$$\tilde{I} + \tilde{J} = [y]\tilde{V} = [y]AY_{BUS}$$

que premultiplicada por A^T , nos conduce a

$$A^T \tilde{I} + A^T \tilde{J} = [y]\tilde{V} = A^T [y]AY_{BUS}.$$

Recordemos que anteriormente vimos que $A^T \underline{i} = 0$ (LCK generalizada) y que además $A^T \underline{J} = I_{BUS}$, entonces una vez sustituidas estas expresiones obtenemos

$$I_{BUS} = A^T [y] A V_{BUS}.$$

Si recordamos la ecuación que obtuvimos en la formulación del análisis nodal, ecuación (1.1) $\underline{I}_{BUS} = [Y_{BUS}] \underline{V}_{BUS}$, entonces comparando estas dos últimas expresiones tendremos finalmente

$$Y_{BUS} = A^T [y] A \quad (1.10).$$

Esta transformación lineal que implica el miembro derecho de la ecuación, está en función de la matriz de incidencia elemento-nodo, A , la cual como se mencionó anteriormente es singular, de ahí el nombre que se da comúnmente al método.

1.1.3. OBTENCION DE Y_{BUS} POR INSPECCION.

La ecuación (1.10) muestra una manera de obtener la matriz Y_{BUS} , sin embargo esta forma, aunque constituye una definición formal y por tanto muy importante, no es adecuada, pues además de lo dispersa de la matriz de incidencia elemento-nodo, los productos matriciales en estos casos deben evitarse dada su costo computacional. La alternativa estriba en que para elementos no acoplados magnéticamente, observamos que la obtención de dicha matriz de red sigue reglas muy simples y por tanto, es más eficiente su obtención por este medio, que por las operaciones matriciales involucradas en (1.10). Las reglas mencionadas arriba consisten en calcular los elementos diagonales de Y_{BUS} , sumando las admitancias de los elementos incidentes al nodo correspondiente. Mientras que para los elementos fuera de la diagonal, su valor es simplemente igual al negativo de la admitancia que conecta a los nodos asociados con la posición del elemento en la mencionada matriz de red. Así por ejemplo, para el elemento (i,j) , su valor será igual al negativo de la admitancia que conecta a los nodos i y j . Tomando en cuenta que hemos venido usando letras minúsculas para denotar tanto los parámetros, como las matrices de la red primitiva y letras

mayúsculas para los elementos y matrices de la matriz de red, podemos expresar la regla mencionada arriba como,

$$Y_{ii} = \sum_{k \in i} y_k, \text{ donde } k \in i \text{ significa elemento } k \text{ incidente con el nodo } i;$$

$$Y_{ij} = -y_k \quad k \in i, j.$$

Es obvio que el primer caso representa los elementos de la diagonal, mientras el segundo caso representa los elementos fuera de la diagonal. A este método comúnmente se le conoce como formación de Y_{BUS} por inspección.

Hacemos énfasis en que *esta regla es válida únicamente en el caso de que no existan acoplamientos magnéticos*.

Ejemplificamos el procedimiento discutido en esta sección, usando el ejemplo que venimos del sistema de cuatro nodos y cinco elementos.

$$Y_{BUS} = A^T [y] A = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

El resultado anterior corrobora la regla que permite implementar la obtención de Y_{BUS} por inspección. De nuevo enfatizamos que la condición para aplicar dicha regla, consiste en que no haya acoplamientos magnéticos en la red. ¿Que alternativa tenemos en el caso de que dichos acoplamientos existan?. Las alternativas consisten en hacer uso de la transformación singular discutida en esta misma sección. Este método es general, si embargo como ya se mencionó deficiente desde el punto de vista computacional; la mejor alternativa seguirá siendo la obtención de Y_{BUS} por inspección. ¿Qué se puede hacer para utilizar esta opción, a pesar del acoplamiento magnético?. La respuesta a esta interrogante constituye el tema de la siguiente sección.

1.1.4. OBTENCIÓN DE Y_{BUS} POR INSPECCIÓN EN REDES ACOPLADAS. EQUIVALENTE DE CELOSIA.

La respuesta a la disyuntiva presentada al final de la sección anterior, está en la obtención de la ecuación $I_{BUS} = [Y_{BUS}]V_{BUS}$ para dos elementos acoplados magnéticamente.

Nos basamos en el par de elementos magnéticamente acoplados que se muestran en la figura 1.4 a continuación.

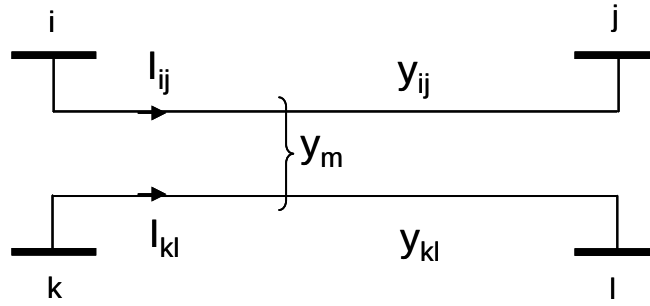


Figura1.4. Elementos magnéticamente acoplados.

Podemos escribir las siguientes ecuaciones que describen el comportamiento de este circuito magnéticamente acoplado.

$$I_{ij} = I_i = -I_j = (V_i - V_j)y_{ij} + (V_k - V_l)y_m$$

$$I_{kl} = I_k = -I_l = (V_k - V_l)y_{kl} + (V_i - V_j)y_m$$

Notemos que las corrientes con doble subíndice, que se indican en la figura, corresponden a las corrientes que fluyen a través de los elementos correspondientes, mientras que las que tienen un solo subíndice, claramente se refieren a las corrientes de nodo, cuya dirección de referencia positiva es cuando se inyectan al nodo. Esto explica las dos primeras igualdades de las ecuaciones anteriores.

Si factorizamos estas ecuaciones obtendremos

$$I_i = -I_j = y_{ij}V_i - y_{ij}V_j + y_mV_k - y_mV_l$$

$$I_k = -I_l = y_mV_i - y_mV_j + y_{kl}V_k - y_{kl}V_l$$

En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{ij} & -y_{ij} & y_m & -y_m \\ -y_{ij} & y_{ij} & -y_m & y_m \\ y_m & -y_m & y_{kl} & -y_{kl} \\ -y_m & y_m & -y_{kl} & y_{kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \\ V_l \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación se representa, de acuerdo a la regla de la obtención de Y_{BUS} por inspección, por medio de un circuito que se le conoce con el nombre de circuito equivalente de celosía ó reticular (del inglés *lattice*).

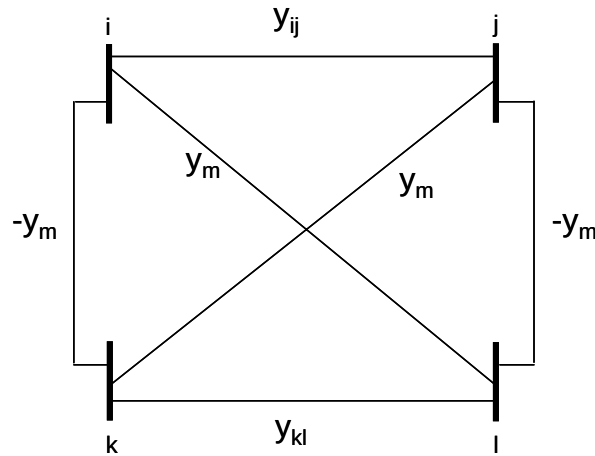


Figura 1.5. Circuito equivalente de celosía.

El uso de dicho circuito permite responder la pregunta que se hizo al final de la sección anterior. Lo que procede hacer en este caso es sustituir los elementos acoplados magnéticamente, por el circuito mostrado en la figura 1.5, y con ello aplicar la sencilla regla que hemos mencionado anteriormente al circuito resultante, y con ello obtener la Y_{BUS} por inspección, que era nuestro objetivo.

Ejemplifiquemos esta nueva herramienta. Para esto usamos el ejemplo que hemos venido manejando, para lo cual agregamos acoplamiento magnético entre los elementos (2) y (4), con un valor $y_m = 0.5 \Omega^{-1}$, como se muestra en la figura 1.6.

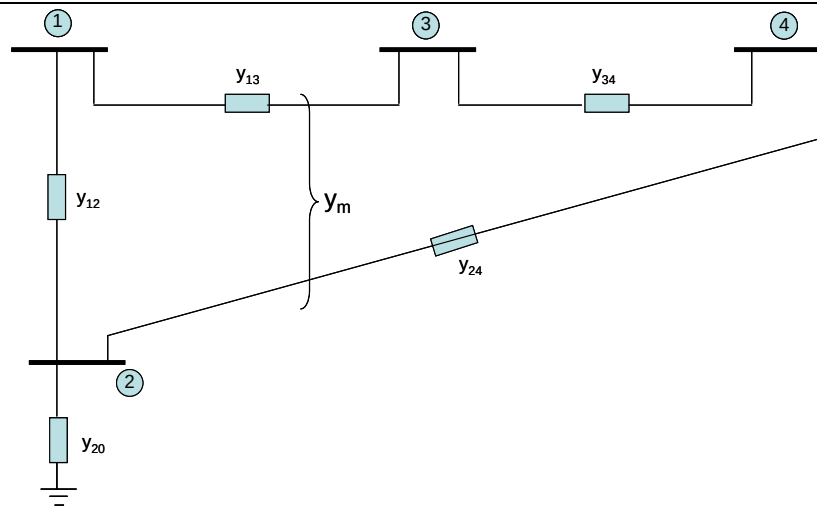


Figura 1.6. Red con acoplamientos magnéticos.

Si aplicamos el equivalente de celosía a esta red, entonces agregamos los elementos que se mostraron en el equivalente de celosía de la figura 1.5. Esto nos conduce a la red que se muestra en la figura 1.7, donde los elementos punteados son los elementos agregados de acuerdo al equivalente de celosía.

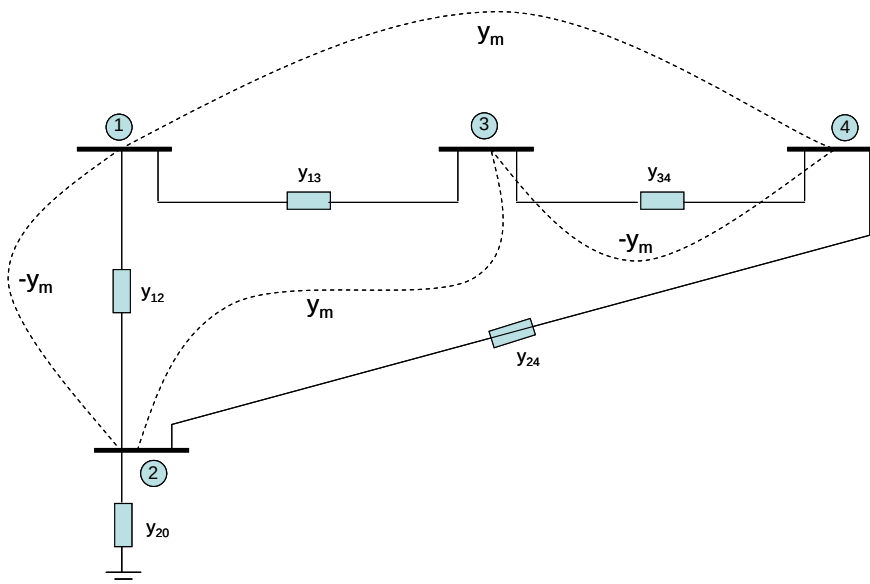


Figura 1.7. Red con el equivalente de celosía agregado.

Si ahora aplicamos la regla que vimos en la sección anterior correspondiente a la obtención de la Y_{BUS} por inspección obtendremos,

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} 4.0 & -1.5 & -2.0 & -0.5 \\ -1.5 & 5.0 & -0.5 & -1.0 \\ -2.0 & -0.5 & 4.0 & -1.5 \\ -0.5 & -1.0 & -1.5 & 3.0 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior se puede comprobar usando el método de transformaciones singulares, es decir

$Y_{BUS} = A^T [y] A$, lo cual conduce a

$$A^T [y] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ -2 & 0.5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y por tanto $Y_{BUS} = A^T [y] A$, resulta en

$$A^T [y] A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ -2 & 0.5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 & -1.5 & -2.0 & -0.5 \\ -1.5 & 5.0 & -0.5 & -1.0 \\ -2.0 & -0.5 & 4.0 & -1.5 \\ -0.5 & -1.0 & -1.5 & 3.0 \end{bmatrix}$$

Por lo que finalmente obtenemos

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} 4.0 & -1.5 & -2.0 & -0.5 \\ -1.5 & 5.0 & -0.5 & -1.0 \\ -2.0 & -0.5 & 4.0 & -1.5 \\ -0.5 & -1.0 & -1.5 & 3.0 \end{bmatrix},$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido antes.

1.1.5. SIGNIFICADO DE LAS MATRICES Y_{BUS} , Z_{BUS} .

Hemos visto como obtener la matriz Y_{BUS} , y también se sabe en este punto, que por inversión podemos obtener la matriz Z_{BUS} a partir de Y_{BUS} . Por supuesto existen formas más eficientes de obtener la matriz Z_{BUS} , pues la inversión es un proceso, que al menos en sistema de gran escala, es ineficiente desde el punto de vista computacional. En la segunda

parte de este material, en la discusión de fallas en sistemas eléctricos, veremos un método más eficiente que la inversa, el cual es aplicable para sistemas de tamaño mediano, el denominado método de obtención de Z_{BUS} paso a paso. Además se verá otro método que tiene el mismo fin, pero que es apropiado para grandes sistemas eléctricos, que por naturaleza son muy dispersos, es decir, que contienen una gran cantidad de elementos igual a cero en su matriz de coeficientes. A este método se le conoce como Z_{BUS} dispersa.

Sin embargo es muy importante entender el significado de estas matrices de red tan importantes en el análisis de los sistemas eléctricos, además de que su significado desde un punto de vista circuital, por llamarle de alguna manera, nos conduce a entender las ideas que subyacen detrás de los métodos arriba mencionados para obtener la Z_{BUS} .

Empezamos por la matriz Y_{BUS} . Si partimos de la ecuación (1.1) y la desarrollamos tendremos

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ . \\ I_j \\ . \\ . \\ . \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & . & . & . & Y_{1j} & . & . & . & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & . & . & . & Y_{2j} & . & . & . & Y_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Y_{j1} & Y_{j2} & . & . & . & Y_{jj} & . & . & . & Y_{jn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Y_{n1} & Y_{n2} & . & . & . & Y_{nj} & . & . & . & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ V_j \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix} \quad (1.11).$$

Si en el vector de voltajes hacemos cero todos los elementos, menos uno, digamos el j -ésimo, entonces lo que tenemos es el siguiente conjunto de ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ . \\ I_j \\ . \\ . \\ . \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & . & . & . & Y_{1j} & . & . & . & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & . & . & . & Y_{2j} & . & . & . & Y_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Y_{j1} & Y_{j2} & . & . & . & Y_{jj} & . & . & . & Y_{jn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Y_{n1} & Y_{n2} & . & . & . & Y_{nj} & . & . & . & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ V_j \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

y si desarrollamos dicha ecuación matricial nos conduce a las siguientes ecuaciones que caracterizan a la red

$$\begin{aligned}
 Y_{1j}V_j &= I_1 \Rightarrow Y_{1j} = I_1/V_j \\
 Y_{2j}V_j &= I_2 \Rightarrow Y_{2j} = I_2/V_j \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 Y_{jj}V_j &= I_j \Rightarrow Y_{jj} = I_j/V_j \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 Y_{nj}V_j &= I_n \Rightarrow Y_{nj} = I_n/V_j
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Lo anterior implica que si aplicamos una fuente de voltaje a un nodo, en este caso al nodo j , y ponemos los demás nodos en corto circuito, lo cual se indica por los valores de voltaje igual a cero, entonces el cociente de la corriente de dicho nodo al voltaje aplicado al nodo seleccionado, nos proporciona los elementos que corresponden a la columna de la matriz Y_{BUS} asociada con el nodo al que se aplicó la fuente de voltaje, nodo j en este caso. Lo anterior se muestra en la figura 1.8 a continuación.

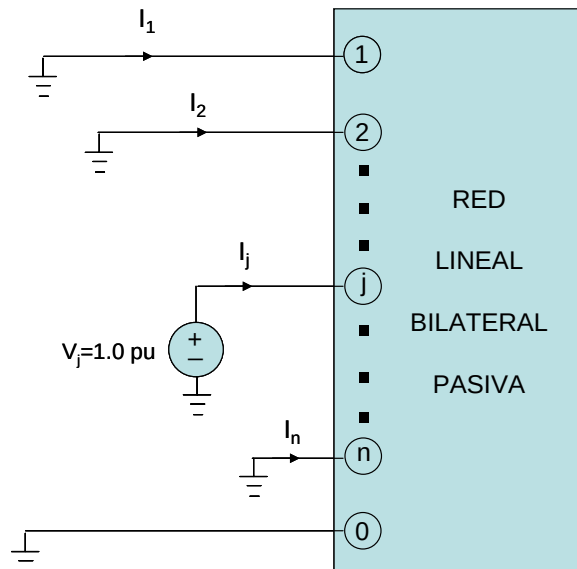


Figura 1.8. Red lineal pasiva usada para calcular la Y_{BUS} .

Por lo discutido anteriormente vemos que si queremos obtener una columna de la matriz Y_{BUS} , entonces conectamos una fuente de voltaje al nodo correspondiente a la columna de interés y con ello calculamos las corrientes en cada uno de los nodos, como se indica en la figura 1.8, y los cocientes de dichas corrientes al voltaje aplicado en el nodo de interés, nos dará los valores de la Y_{BUS} correspondientes al nodo excitado, como lo indican las ecuaciones (1.12). Es obvio que siendo la red lineal, el valor de la fuente de excitación es irrelevante, pues el cociente siempre será igual, por lo que se propone el valor más fácil de manejar, 1.0 pu. Además con esto, los valores de los elementos matriciales de interés serán simplemente igual a las corrientes inyectadas a los nodos.

Es muy importante observar que el elemento diagonal, es la admitancia equivalente de la red vista entre el nodo excitado y referencia. A esta función de red se le denomina *admitancia de punto impulsor en corto circuito*, que es la traducción del término en inglés *short circuit driving-point admittance*. Es interesante notar que aunque en inglés se le llame “punto impulsor”, en realidad se trata de un puerto impulsor, pues está compuesto por un par de terminales. El término impulsor indica que es el puerto donde se conecta la excitación. Así pues, aunque no del todo correcto, la costumbre ha hecho que se usen ampliamente estos términos. Por otro lado, a las admitancias de red fuera de la diagonal se les conoce como *admitancias de transferencia en corto circuito*, traducción del término en inglés *short circuit transfer admittance*.

Para ejemplificar lo anterior, usaremos de nuevo la red del ejemplo, con la intención de obtener la columna 1 de la matriz Y_{BUS} , de dicha red. La figura 1.9 nos muestra el circuito asociado en este caso,

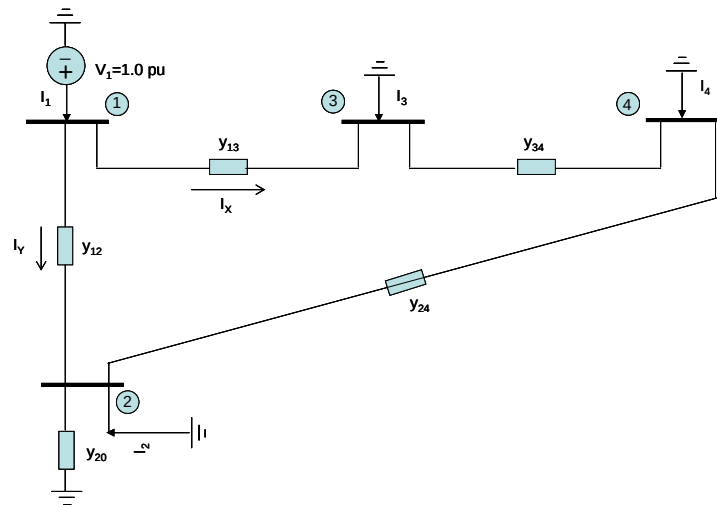


Figura 1.9. Red del ejemplo para obtención de la columna 1 de Y_{BUS} .

Podemos ver de la gráfica anterior que $I_x = -I_3$ y además $I_y = -I_2$. Por otro lado vemos que

$$I_1 = \frac{V_1}{z_{eq}} = \frac{1.0}{\left(\frac{1/2 * 1/2}{1/2 + 1/2} \right)} = \frac{1.0}{0.25} = 4.0$$

Evidentemente $I_x = \frac{I_1}{2} = 2.0 = I_y$, por lo que obtenemos

$$Y_{11} = I_1/V_1 = \frac{4.0}{1.0} = 4$$

$$Y_{21} = I_2/V_1 = \frac{-2.0}{1.0} = -2$$

$$Y_{31} = I_3/V_1 = \frac{-2.0}{1.0} = -2$$

$$Y_{41} = I_4/V_1 = \frac{0}{1.0} = 0.$$

Los resultados anteriores son evidentes, a estas alturas.

Por lo que respecta a la interpretación de la matriz Z_{BUS} , empezamos considerando al ecuación (1.2) $V_{BUS} = [Z_{BUS}] I_{BUS}$, que en forma desarrollada tiene la forma

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ V_j \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & . & . & . & Z_{1j} & . & . & . & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & . & . & . & Z_{2j} & . & . & . & Z_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Z_{j1} & Z_{j2} & . & . & . & Z_{jj} & . & . & . & Z_{jn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Z_{n1} & Z_{n2} & . & . & . & Z_{nj} & . & . & . & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ . \\ I_j \\ . \\ . \\ . \\ I_n \end{bmatrix}$$

Si hacemos cero todas las corrientes nodales, menos una de ellas, digamos la j -ésima corriente, obtenemos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ V_j \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & . & . & . & Z_{1j} & . & . & . & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & . & . & . & Z_{2j} & . & . & . & Z_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Z_{j1} & Z_{j2} & . & . & . & Z_{jj} & . & . & . & Z_{jn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Z_{n1} & Z_{n2} & . & . & . & Z_{nj} & . & . & . & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ I_j \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Llevando a cabo las operaciones matriciales, nos resultan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} Z_{1j} I_j &= V_1 \Rightarrow Z_{1j} = V_1 / I_j \\ Z_{2j} I_j &= V_2 \Rightarrow Z_{2j} = V_2 / I_j \\ . \\ . \\ Z_{jj} I_j &= V_j \Rightarrow Z_{jj} = V_j / I_j \\ . \\ . \\ Z_{nj} I_j &= V_n \Rightarrow Z_{nj} = V_n / I_j \end{aligned} \quad (1.13)$$

Lo anterior nos indica que para obtener una columna de la matriz Z_{BUS} , inyectamos una corriente en el nodo asociado con la columna que queremos obtener, dejando en circuito abierto los demás nodos, y calculamos los voltajes en los demás nodos. Los cocientes de los voltajes en nodales en circuito abierto a la corriente de la fuente de excitación, nos producen el resultado deseado, los elementos de la columna correspondiente al nodo excitado de la matriz Z_{BUS} .

La figura 1.10 muestra esquemáticamente esta interpretación.

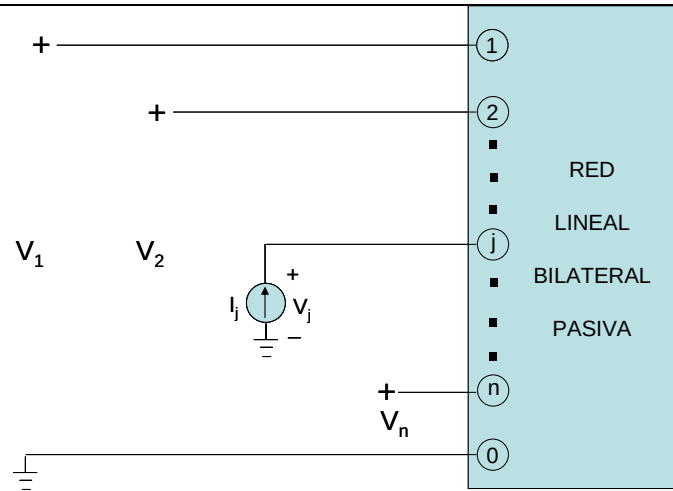


Figura 1.10. Red lineal pasiva usada para calcular la matriz Z_{BUS} .

Note que el término de la diagonal de la matriz Z_{BUS} , es la impedancia equivalente de Thévenin referida de manera constante en los cursos de circuito. Debido a la interpretación de este elemento, se le conoce con el nombre de *impedancia de punto impulsor en circuito abierto*, que es la traducción del término en inglés *driving point open-circuit impedance*. Mientras que a las correspondientes a los elementos fuera de la diagonal se les denomina *impedancia de transferencia en circuito abierto*, traducción del término en inglés *open circuit transfer impedance*. Estos nombres, al igual que los mencionados anteriormente con respecto a la matriz Y_{BUS} , son muy importantes, a pesar de lo aparentemente complicados que parecen. El lector se dará cuenta, si observa con cuidado, que dichos nombres, que aparentemente tienen muchos términos, definen de manera muy precisa el significado de estas funciones de red, pues contienen las condiciones necesarias para la definición-interpretación de dichos funciones de red en el marco nodal, tanto en su forma de admitancia como en su forma de impedancia.

Para complementar la información anterior, nos referimos a la red usada en esta sección, mostrada en la figura 1.11

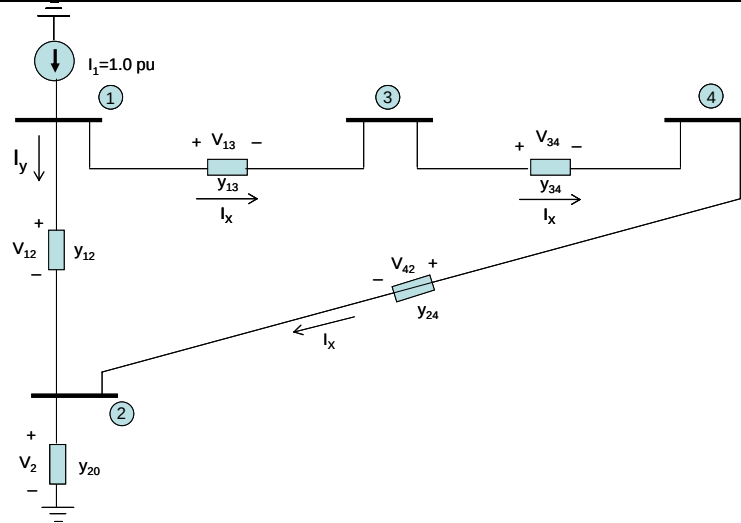
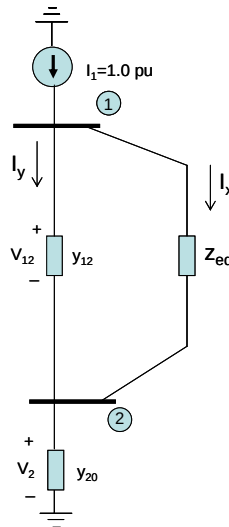


Figura 1.11. Red del ejemplo para obtención de la columna 1 de Z_{BUS} .

En el ejemplo excitamos el nodo 1 con el objeto de obtener la 1^{era} columna de la Z_{BUS} , como se muestra en la figura anterior.

Observamos que la porción de red a la derecha de los nodos 1 y 2, tiene una impedancia equivalente de 2.0Ω , que queda en paralelo con la porción izquierda. Como una gráfica dice más que mil palabras, la siguiente figura muestra lo comentado.



En referencia a la red mostrada arriba vemos que si aplicamos división de corrientes obtenemos:

$$I_y = 1.0 - I_x = 4/5$$

y también:

$$I_y = 1.0 - I_x = 4/5.$$

Con estos resultados y con referencia a la figura I.11, obtenemos los voltajes de los elementos

$$V_{13} = \frac{1}{2} I_x = (1/2)(1/5) = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$V_{34} = (1/2)(1/5) = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$V_{42} = (1/2)(1.0) = 0.5$$

$$V_{42} = (1/2) I_y = (4/10) = 0.4 ,$$

con lo cual podemos calcular los voltajes nodales, obteniendo

$$V_1 = V_{12} + V_2 = 0.4 + 0.5 = 0.9$$

$$V_3 = V_1 - V_{13} = 0.9 - 0.1 = 0.8$$

$$V_4 = V_3 - V_{34} = 0.8 - 0.1 = 0.7 ,$$

de donde finalmente obtenemos

$$Z_{11} = V_1 / I_1 = \frac{0.9}{1.0} = 0.9$$

$$Z_{12} = V_2 / I_1 = 0.5$$

$$Z_{13} = V_3 / I_1 = 0.8$$

$$Z_{14} = V_4 / I_1 = 0.7 .$$

Con lo cual se completa este ejemplo.

1.1.6 TÉCNICAS DE DISPERSIDAD.

INTRODUCCION.

La mayoría de los sistemas físicos se caracterizan por el hecho de que sus no son completamente interdependientes, es decir, sus elementos no están conectados o enlazados a todos los demás. Por ejemplo, en redes de cualquier tipo, ya sea eléctricas o de fluidos, no todos los elementos son incidentes a cada nodo de la red. Lo anterior trae como consecuencia el hecho de que en el modelo matemático de dicho sistema, la matriz de coeficientes contiene una gran cantidad de ceros, producto de la no incidencia de los elementos a un nodo. Lo anterior, aunado a que los sistemas han crecido continuamente de tamaño, dicta la necesidad de sacar provecho de esa característica en la solución de dichos problemas en la computadora, como veremos más adelante. Lo anterior, constituye el objetivo de la presente sección.

Antes de entrar a ver los detalles de las técnicas de dispersidad (también llamadas de esparcidad), es importante tener alguna medida de la “porosidad” de una de las matrices que más se utiliza en el análisis de los sistemas eléctricos, la Y_{BUS} . Definimos lo que se conoce con el nombre de coeficiente de dispersidad (cd) [3]; este se define como la razón entre el número de elementos con valor cero y el número total de elementos en la matriz. Para la Y_{BUS} asociada con una red de n nodos independientes, (que son nodos no conectados directamente a referencia) y b' ramas conectadas entre nodos independientes, el número total de elementos diferentes de cero será en la matriz Y_{BUS} igual a $n + 2 * b'$, y el número total de elementos de Y_{BUS} es: n^2 . De aquí que el coeficiente de dispersidad será

$$cd = \frac{n^2 - (n + 2 * b')}{n^2} = 1 - \frac{n + 2 * b'}{n^2}.$$

En la práctica una red de $n = 1000$ nodos y $b' = 1500$ ramas es comúnmente encontrada, y para estas cifras cd será

$$cd = 1 - \frac{1000 + (2 * 1500)}{(1000)^2} = 0.996 \quad cd = 1 - \frac{1000 + (2 * 1500)}{(1000)^2} = 0.996.$$

Es importante notar que una propiedad de la matriz Y_{BUS} consiste en que, para una red dada, cd depende solamente del gráfico de la red, esto es, del número de ramas y del número de nodos, y por tanto es constante.

Las técnicas de dispersidad constituyen recursos de programación, con cierto grado de sofisticación, usados en conjunto con estrategias algorítmicas en la solución de los sistemas lineales de ecuaciones, que preserven durante el proceso de factorización la mayor cantidad de ceros posible. Lo anterior nos conduce a enumerar dos fases fundamentales en las técnicas de dispersidad:

1^o. Empaquetar la información del modelo matemático, es decir, específicamente guardar únicamente los elementos distintos de cero.

2^o. Determinar el orden de eliminación adecuado, con el fin de minimizar la creación de elementos diferentes de cero, en lugar de los elementos de valor cero que existían en esa posición antes de dicha eliminación.

A la primera tarea se le conoce como *empaquetado*, como lo habíamos anticipado al enumerarla. Su objetivo no es solo ahorrar memoria, almacenando únicamente los elementos distintos de cero (los de valor cero ya se conoce cuanto valen!), sino evitando las operaciones por cero. Esto nos conduce a un gran ahorro de tiempo de máquina empleado en la solución del sistema de ecuaciones, debido a que por la forma en que la computadora digital realiza las operaciones, esta toma el mismo tiempo en un producto por cero, que en un producto por un factor distinto de cero.

A la segunda tarea arriba mencionada se le conoce como *ordenamiento*, y consiste en determinar el orden de la eliminación y/o factorización que nos conduzca a la minimización de la creación de elementos diferentes de cero, en lugar de un elemento cero, como habíamos mencionado. En efecto, se puede probar que si ordenamos las ecuaciones de un sistema lineal de las todas las formas diferentes posibles, el número de *llenados*, que es el término que se emplea para designar a la creación de un elemento no-cero en lugar de un cero, creados por el efecto de los productos cruzados de la eliminación y/o factorización, será menor en unos casos que en otros. El término productos cruzados, empleado arriba se refiere a la expresión base en el proceso de eliminación y/o factorización y que tiene la

forma $a'_{ij} = a_{ij} + \frac{a_{ik} a_{kj}}{a_{kk}}$, que tan familiar es para los que han llevado un curso de álgebra

lineal ó de métodos numéricos. En esta expresión se puede ver fácilmente, que un elemento no se verá modificado en el proceso, cuando alguno de los factores del numerador del segundo término a la derecha de la expresión anterior, es igual a cero. Con esto en mente concluiremos fácilmente que habrá algún orden asociado con el menor llenado

posible, esto es, un orden óptimo. Por supuesto que aunque dicho orden óptimo sea factible de obtener, su costo computacional hace que los beneficios de ahorro de memoria y tiempo de cómputo, se vea opacado por el excesivo trabajo requerido en la determinación de dicho orden óptimo.

ESQUEMAS DE ORDENAMIENTO.

En el tema de topología de redes se discutió la asociación de los gráficos lineales con las redes eléctricas. Además de asociarse con las redes eléctricas, sin embargo, toda matriz de coeficientes puede asociarse con un gráfico lineal. Hay que hacer notar que en esta equivalencia matriz de coeficientes-gráfico lineal, es directa en caso de que la matriz mencionada sea simétrica. En el caso de que la matriz sea asimétrica, existe una representación topológica también, aún cuando el gráfico lineal en este caso no está asociado con un sistema físico.

Cada nodo en el gráfico lineal mencionado arriba corresponde a un renglón y columna correspondiente de la matriz. La representación topológica de una matriz tiene dos objetivos, básicamente. Primero, nos permite reconocer el carácter disperso de la matriz, y segundo, nos permite entender y analizar el proceso del “llenado” resultante del proceso de eliminación y/o factorización, así como minimizar sus efectos indeseables. La idea central en el análisis del llenado, desde el punto de vista topológico, es el de la conectividad indirecta entre nodos. La figura 1.12 nos muestra tres nodos: i , j y k .

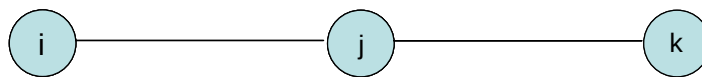


Figura 1.12. Conexión entre nodos en un gráfico lineal.
Nodos i y k conectados a través de j .

En este caso, la transmisión de información se lleva a cabo a través del nodo j , de tal manera que si eliminamos el nodo j , se creará una nueva conexión entre los nodos i y k , para restablecer la comunicación entre dichos nodos.

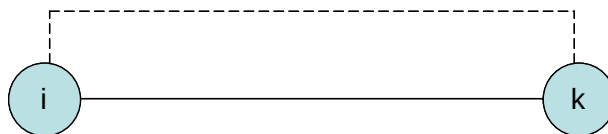


Figura 1.13. Creación de un llenado por la eliminación de un nodo.

Esta nueva conexión representa un llenado, ó sea la creación de un elemento *no-cero* en el lugar donde previamente existía un elemento cero en la matriz de coeficientes. La regla anterior es básica para entender el proceso de *llenado* y, por tanto, los criterios en el desarrollo de las técnicas de ordenamiento que veremos enseguida.

Para ilustrar lo referente al efecto del orden de eliminación en el llenado, consideremos el gráfico mostrado en la figura 1.14.

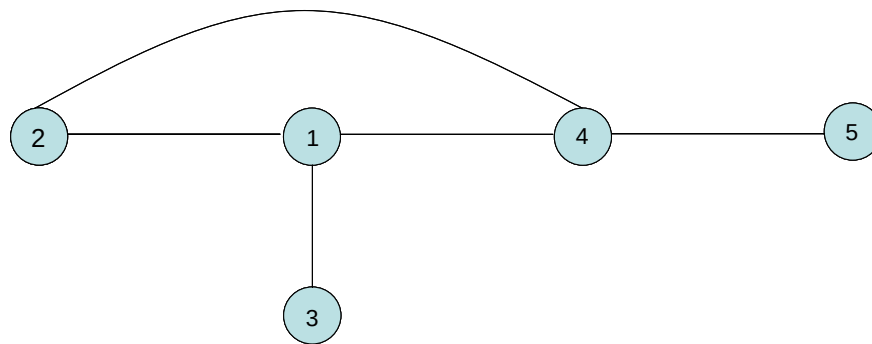


Figura 1.14. Gráfico lineal.

La estructura de la matriz de incidencia ó bien de la matriz de coeficientes asociada con el gráfico lineal mostrado, se muestra enseguida

nodo	1	2	3	4	5
1	x	x	x	x	0
2	x	x	0	x	0
3	x	0	x	0	0
4	x	x	0	x	x
5	0	0	0	x	x

El signo x indica la existencia de un elemento distinto de cero (elemento no cero) y con la finalidad de mostrar lo referente al llenado, cuyos elementos serán indicados por $\otimes$, mostramos la matriz cuando eliminamos el primer nodo (el eje puntado muestra el eje pivote)

nodo	1	2	3	4	5
1	x	x	x	x	0
2	x	x	⊗	x	0
3	x	⊗	x	⊗	0
4	x	x	⊗	x	x
5	0	0	0	x	x

Es importante notar que, de acuerdo a la observación hecha arriba, respecto al producto cruzado, notamos que cuando uno de los elementos de la columna y renglón pivotes es igual a cero, ese factor provocará que no haya modificación del elemento correspondiente, en caso contrario, el elemento a_{ij} se modificará, y esto es lo que produce los llenados.

En la figura 1.15, mostramos gráficamente lo ocurrido como resultado de eliminar el nodo 1.

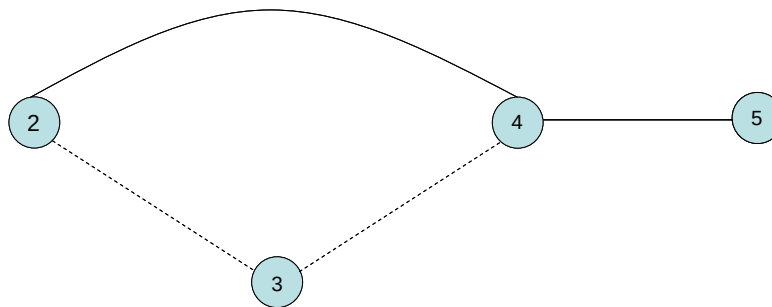


Figura 1.15. Gráfico lineal resultante de la eliminación del nodo 1.

Observamos que la decisión de eliminar primero el nodo 1 resulta en la creación de 4 llenados.

Tomemos ahora como caso la eliminación del nodo 5 primero. El resultado será

nodo	1	2	3	4	5
1	x	x	x	x	0
2	x	x	0	x	0
3	x	0	x	0	0
4	x	x	0	x	x
5	0	0	0	x	x

La representación gráfica de esta operación la podemos ver en la figura 1.16.

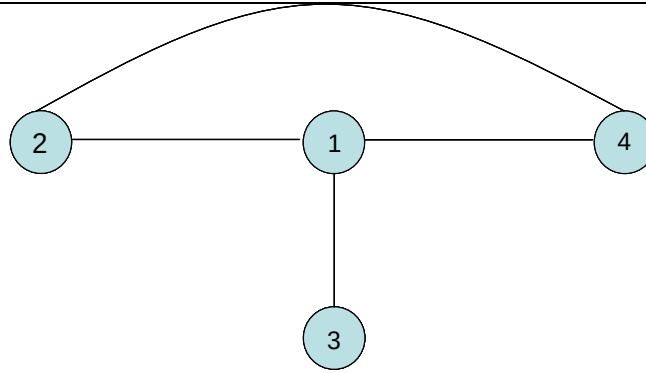


Figura 1.16. Gráfico lineal resultante de la eliminación del nodo 5.

El resultado de lo anterior es 0 llenados!, pues como vemos en la figura 1.16, hemos eliminado un nodo que no interconecta otros nodos y como resultado no se generan nuevos elementos.

El resultado anterior conforma el criterio básico usado en los métodos de ordenamiento de la eliminación (y factorización): eliminar, de preferencia, los nodos radiales, pues vemos que ellos producirán el menor número de elementos nuevos.

De acuerdo a lo anterior se han planteado tres esquemas de ordenamiento que han dado lugar a otros tantos métodos. Estos métodos se discuten enseguida y, aunque no son los únicos, son los métodos básicos a partir de los cuales se han desarrollado una gran cantidad de métodos más sofisticados, la mayoría empleados en sistemas con propiedades muy peculiares, que se han documentado en la bibliografía mostrada al final de esta unidad.

Los esquemas que se discuten a continuación se pueden clasificar en dos tipos: esquemas de preordenamiento y esquemas dinámicos. En el primer caso se analiza la red original y en base al análisis llevado a cabo antes de la eliminación, se determina el orden de ésta, es decir, una vez determinado dicho orden, se efectúa la eliminación correspondiente, sin efectuar análisis en las etapas intermedias de eliminación. A diferencia de lo anterior, en los esquemas dinámicos, en cada paso se revisa el estado de la red para decidir cual nodo de be ser eliminado en el siguiente paso.

1er esquema de ordenamiento: Menor número de ramas conectadas.

En este esquema de preordenamiento se inspecciona el gráfico original, y la secuencia de eliminación se determina en el orden dado por el menor número de ramas conectadas a un nodo (renglón y columna con el menor número de elementos de valor cero), esto es, la

secuencia estará en el orden dado por el número de ramas conectadas a cada nodo en forma ascendente. Si más de un nodo tiene el mismo número de ramas, se toma cualquiera de estos al azar.

Para el gráfico que utilizando en el ejemplo anterior, el primer esquema conduce al orden: 3,5,2,1,4. Lo anterior dado que el número de ramas conectadas de acuerdo a la siguiente tabla, así lo determina.

<u>NODO</u>	<u>No. DE RAMAS</u>
1	3
2	2
3	1
4	3
5	1

2º Esquema de ordenamiento (Dinámico). Menor número de ramas conectadas.

Este esquema es idéntico al anterior, excepto que se aplica no solo al inicio, sino que revisa el criterio en cada etapa de eliminación. Recordemos que la eliminación de un nodo equivale a la eliminación del renglón y columna asociado con dicho nodo en la matriz de incidencia del gráfico. El orden correspondiente al ejemplo que hemos utilizado se determina como se muestra a continuación.

Eliminamos el nodo 3, pues al igual que el nodo 5, tiene una sola rama conectada. Por estandarizar, en el ejemplo presente cuando existe empate en el número de ramas conectadas a un nodo, tomaremos aquel cuyo código sea menor, o sea 3 en este caso. Es importante recordar que en este caso se puede tomar al azar, de acuerdo a las reglas enunciadas para esta técnica. La eliminación del nodo 3 no genera ninguna rama. Enseguida eliminamos el nodo 5, dado que es el que tiene un menor número de ramas conectadas a él. De igual forma, la eliminación de dicho nodo no genera ningún llenado. En este punto, restan por eliminar los nodos 1, 2, y 4, todos ellos con 2 ramas, por lo que se elimina el nodo cuyo código sea menor, es decir, 1. Finalmente nos restan los nodos 2 y 4, ambos con 1 rama conectada, por lo que eliminamos el 2, primeramente, y finalmente el 4. De donde el orden de eliminación de acuerdo con este esquema de ordenamiento es: 3, 5, 1, 2, 4. Gráficamente la secuencia anterior se muestra en la figura 1.17.

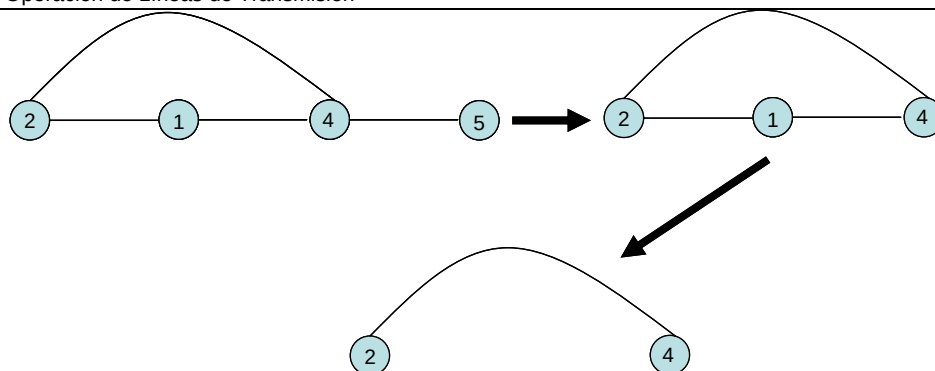


Figura 1.17. Ejemplo 2^o esquema de ordenamiento.

3er Esquema de ordenamiento (Dinámico). Menor número de ramas nuevas generadas.

En este esquema, el nodo que al eliminarse genera el menor número de ramas (llenado) se selecciona como el más adecuado para eliminar. Para ejemplificar este esquema, tomamos la red de los ejemplos anteriores y desarrollamos la eliminación, mostrando en cada fase el llenado producido si se efectuara la eliminación de cada uno de los nodos.

Primera Fase

<u>NODO</u>	<u>LLENADOS PRODUCIDOS</u>
1	2 (2-3 y 3-4)
2	0
3	0
4	2 (2-5 y 3-5)
5	0

Concluimos que debemos eliminar el nodo 2.

Segunda Fase

<u>NODO</u>	<u>LLENADOS PRODUCIDOS</u>
1	1 (3-4)
3	0
4	1 (1-5)
5	0

Se elimina el nodo 3

Tercera Fase

<u>NODO</u>	<u>LLENADOS PRODUCIDOS</u>
1	0
4	1 (1-5)
5	0

Se procederá por tanto a eliminar el nodo 1. Finalmente, nos quedan los nodos 4 y 5 que se pueden eliminar en cualquier orden. Eliminamos de acuerdo a la convención estipulada anteriormente, es decir, en el orden 4,5. El orden será entonces: 2,3,1,4,5.

Existen más esquemas de ordenamiento además de los mencionados. Sin embargo en la mayoría de los casos encontrados en la Ingeniería Eléctrica, el segundo esquema dinámico cumple con el compromiso de dar buenos resultados, desde el punto de vista de minimización de llenados, y a su vez el esfuerzo computacional asociado en su ejecución es razonable.

EMPAQUETADO DE MATRICES.

El objetivo del empaquetado de matrices, como se mencionó antes, consiste en optimizar el uso de memoria involucrado en el almacenamiento de matrices altamente dispersas, como es el caso de la matriz Y_{BUS} , usando técnicas de almacenamiento más adecuadas que las utilizadas comúnmente en los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales que hemos venido usando hasta ahora. En general, los métodos de eliminación pueden explotar la dispersidad en los siguientes aspectos:

- 1^o. Usándolos en conjunto con una técnica adecuada de ordenamiento, minimizando el llenado producido durante el proceso de eliminación (ó factorización), y
- 2^o. Almacenando, y lo que es muy importante, procesando únicamente los elementos diferentes de cero.

Respecto al 2^o punto, es importante hacer notar que el beneficio del empaquetado no solo se limita al ahorro de memoria, sino al ahorro de tiempo computacional, dado que una operación por cero toma el mismo esfuerzo a la computadora, que una operación por cualquier otra cifra numérica. Lo anterior se comprende si se consulta la bibliografía acerca de cómo se efectúan las operaciones aritméticas en la computadora digital.

Recordemos simplemente que aún cuando dicha operación por cero es trivial para nosotros, no lo es para la computadora. Lo anterior se debe a que mientras nosotros razonamos a través de un proceso simbólico, la computadora efectúa un proceso numérico. Para entender la idea básica de las técnicas de empaquetado, recurrimos al ejemplo de una lista numérica, su almacenamiento y su manipulación. Dicha manipulación involucra los problemas de: ordenamiento, inserción y eliminación de los elementos de la lista. Consideremos al siguiente lista de números:

31.2 57.0 20.5 42.3 31.2 57.0 20.5 42.3

Esta lista se puede almacenar en un arreglo en el mismo orden en que se proporcionó, como se indica:

<i>loc</i>	1	2	3	4
<i>valor</i>	20.5	31.2	42.3	57.0

Podemos almacenar esta misma lista en orden ascendente como se muestra:

<i>loc</i>	1	2	3	4
<i>valor</i>	20.5	31.2	42.3	57.0

Supongamos ahora que queremos agregar un número a la lista, conservando el orden del almacenamiento. Pueden ocurrir dos casos. Primero, que el número que se va a agregar corresponda al final de la lista, en cuyo caso el problema es trivial, pues simplemente se agrega y el problema se terminó. El segundo caso ocurre cuando el número a agregar tiene un valor numérico que le determina un lugar en la lista, que no corresponde al final, en cuyo caso hay que insertarlo. Mediante técnicas convencionales, por llamarlo de alguna manera, lo anterior requeriría el corrimiento de los elementos ubicados entre el valor inmediato superior al valor del elemento que se va a insertar, y el final de la lista. Por ejemplo, supongamos que queremos agregar el valor 33.0 a la lista que estamos usando. En este caso, el valor que se va a agregar tomaría la posición 3, debiendo entonces correr los números en las posiciones 3 y 4, a las posiciones 4 y 5, respectivamente. Ilustramos lo anterior a continuación:

<i>loc</i>	1	2	3	4	5
<i>valor</i>	20.5	31.2	33.0	42.3	57.0

Es importante hacer notar que la operación de corrimiento implica un gran esfuerzo en el caso de listas grandes, lo cual es el caso de los grandes sistemas en Ingeniería, por lo que dicho método no es el más apropiado en dichos casos.

Para resolver el problema antes mencionado, se emplea un método más eficiente conocido con el nombre de *listas enlazadas* (linked lists). Esta técnica, que es conocida por los ingenieros en sistemas computacionales desde hace mucho tiempo, consiste en almacenar las listas de números sin importar el orden de éstos, y usa un arreglo extra para almacenar la información del orden numérico de los elementos en dicho arreglo. La finalidad de lo anterior es que cuando existe la necesidad de insertar un elemento, no hay necesidad de efectuar el corrimiento que hicimos anteriormente, limitándonos únicamente a registrar el orden en el arreglo construido para tal fin. Ilustremos lo anterior con el ejemplo que hemos venido manejando:

<i>loc</i>	1*	2	3	4	5
<i>valor</i>	20.5	31.2	33.0	42.3	57.0
<i>prox.</i>	2	3	4	5	0

Hay varias cosas que requieren una explicación. Primero, observamos que el nuevo arreglo, llamado *prox*, apunta a la posición del siguiente elemento en la lista. Y el valor de dicho arreglo, en una posición dada, es cero para indicar el final de la lista, y será diferente de cero cuando no es el final de la lista, y en este caso apunta a la posición donde está contenido, en el arreglo *valor* por supuesto, el siguiente elemento en la lista. Por otro lado, observamos que agregamos un asterisco, al primer elemento en este caso, con el fin de señalar el inicio de la lista. Con lo anterior vemos que para ordenar la lista, el arreglo *valor* no se altera sino únicamente el arreglo *prox*.

Con el fin de ejemplificar las ventajas del método de listas enlazadas, supongamos que queremos agregar un elemento a la lista, y que éste tiene un valor de 42.0. En lugar de correr los elementos correspondientes, insertamos el elemento al final de la lista, y modificamos el arreglo *prox* como se muestra a continuación.

<i>loc</i>	1*	2	3	4	5	6
<i>valor</i>	20.5	31.2	33.0	42.3	57.0	42.0
<i>prox</i>	2	3	6	5	0	4

Supongamos ahora que queremos agregar el número 12.3 a la lista. Las modificaciones requeridas se muestran a continuación:

<i>loc</i>	1	2	3	4	5	6	7*
<i>valor</i>	20.5	31.2	33.0	42.3	57.0	42.0	12.3
<i>prox</i>	2	3	6	5	0	4	1

Este ejemplo es ilustrativo del caso en que el número a agregar, sea de menor valor que los ya existentes, en cuyo caso habrá que modificar no solamente el arreglo *prox*, sino la marca de inicio de la lista, como se muestra en el ejemplo anterior.

Hasta aquí hemos visto la forma eficiente de almacenar la información de una lista de números, lo cual constituye el manejo de un vector. Sin embargo, nuestro principal interés está en el manejo de la información contenida en las matrices. A continuación veremos el uso de la técnica de listas enlazadas aplicada al manejo de la información matricial. Como podemos anticipar, la estructura de los arreglos que debemos usar en este caso, será un poco más compleja que la del caso de la lista numérica que hemos venido utilizando hasta ahora.

Se han propuesto varios esquemas de almacenamiento propuestos. Sin embargo, describiremos el más ventajoso para nuestras aplicaciones. El lector interesado en profundizar en esta disciplina, encontrará en la bibliografía al final, una fuente importante de información.

Las características de un esquema como el mencionado arriba se pueden resumir como sigue:

- Manejar elementos diferentes de cero: eliminarlos del arreglo e incorporarlos.
- Proporcionar información de elementos diferentes de cero en cada renglón, para utilizarla en el ordenamiento.
- Debe ser suficientemente flexible para permitir pivotar en cualquier orden.

Este esquema es una extensión de la técnica de listas enlazadas, y consiste de tres arreglos en su primera tabla, para elementos fuera de la diagonal. Dichos arreglos son:

VALOR: Contiene el valor numérico del elemento (fuera de la diagonal)

RENG: Almacena el índice del renglón

PROX: Permite la localización del próximo elemento distinto de cero en la columna.

La segunda tabla está formada por los arreglos de los elementos de la diagonal principal de la matriz. Dichos arreglos son:

DIAG: Valor numérico del elemento diagonal

ICAP: Contiene el índice del apuntador de dirección de la columna

NOZE: Número de elementos diferentes de cero fuera de la diagonal.

Tomemos como ejemplo al matriz que se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} 3.0 & -1.0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 2.0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 2.0 & -1.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

En forma empaquetada, la matriz anterior queda como sigue:

<i>loc</i>	1	2	3	4	5	6	7*	8	9
<i>VALOR</i>	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-	-	-
<i>RENG</i>	2	3	1	1	4	3	-	-	-
<i>PROX</i>	2	0	0	5	0	0	8	9	10

<i>loc</i>	1	2	3	4
<i>DIAG</i>	3.0	2.0	2.0	1.0
<i>ICAP</i>	1	3	4	6
<i>NOZE</i>	2	1	2	1

En este caso es importante notar que el asterisco, en la primera tabla, nos marca la posición del inicio de posiciones disponibles, es decir, a partir de la posición 7 está disponible para almacenamiento. En esta posición se almacenaría por ejemplo los llenados que se generarían durante el proceso de eliminación ó factorización.

Como ejemplo de la forma en que se modificarían los arreglos con la inserción de nuevos elementos, supongamos que queremos agregar el elemento $a_{14} = -2.0$ y su correspondiente elemento simétrico, con el mismo valor numérico. Para efectuar la inserción, localizamos el último elemento diferente de cero correspondiente ala columna 1, usando el arreglo *ICAP(1)*. Este se encuentra en *loc(2)* en la primera tabla. Cambiamos el valor de *loc(2)* = 0, lo cual nos indicaba que era el último valor almacenado para la columna1, por el valor de la primera posición disponible la cual es 7;esto es, cambiamos *loc(2)* al valor de 7 y entonces a_{41} se almacena en el primer lugar disponible, es decir, *loc(7)*. Además se deben modificar *NEXT(2)* y *NOZE(1)*, y las modificaciones en los arreglos quedan como sigue: a_{41}

$$NEXT(2) = 7$$

$$VALOR(7) = -2.0$$

$$RENG(7) = 4$$

$$PROX(7) = 0$$

$$NOZE(1) = 3.$$

El estado de las tablas se muestra enseguida:

<i>loc</i>	1	2	3	4	5	6	7	8*	9
<i>VALOR</i>	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-2.0	-	-
<i>RENG</i>	2	3	1	1	4	3	4	-	-
<i>PROX</i>	2	7	0	5	0	8	0	9	10

<i>loc</i>	1	2	3	4
<i>DIAG</i>	3.0	2.0	2.0	1.0
<i>ICAP</i>	1	3	4	6
<i>NOZE</i>	3	1	2	1

Y después de agregar el elemento simétrico, los arreglos se modifican como se muestra:

<i>loc</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9*
<i>VALOR</i>	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-2.0	-2.0	-
<i>RENG</i>	2	3	1	1	4	3	4	1	-
<i>PROX</i>	2	7	0	5	0	8	0	0	10

<i>loc</i>	1	2	3	4
<i>DIAG</i>	3.0	2.0	2.0	1.0
<i>ICAP</i>	1	3	4	6
<i>NOZE</i>	3	1	2	2

Es importante hacer notar que el esquema de empaquetado explicado arriba, corresponde al caso de matrices simétricas. En las referencias bibliográficas, sin embargo, se encontrarán técnicas adecuadas al caso de matrices asimétricas, las cuales son simplemente modificaciones al esquema presentado aquí.

Todo lo presentado aquí se está asociado con esquemas que implícitamente usan variables estáticas, ó no dinámicas en su programación, lo que se explica por la era FORTRAN, que por otro lado sigue siendo un lenguaje de programación muy defendido por la gente que hace simulación numérica, lo cual es el caso de las aplicaciones discutidas aquí. El lector es referido a la bibliografía de final de capítulo para ver un ejemplo, en el que se usó un esquema muy simple haciendo uso de punteros (variables dinámicas) [10].

BIBLIOGRAFIA.

- [1]. N. Balabanian, T. A. Bickart, S. Seshu. Electrical Network Theory. John Wiley & Sons. (1969).
- [2]. G. W. Stagg, A. H. El-Abiad. Computer methods in power system análisis. McGraw Hill. (1968).
- [3]. Brameller, et al. Sparsity. Pitman Ltd. (1976).
- [4]. S. Pisanetsky. Sparse Matrix Technology. Academic Press.
- [5] George, Liu. Computer solution of large sparse positive definite systems. Prentice Hall.
- [6]. Zollenkopf. Bi-factorization computational algorithm and programming techniques. Capítulo del libro “Large sparse sets of linear equations” edited by Reid. Academic Press.
- [7]. Tinney, W. F. , Walker, J. W. Direct solution of sparse networks equations by optimal ordered triangular factorization. Proceedings of the IEEE 55, pp. 1801-1809.
- [8].Sato, N., Tinney, W. F. Techniques exploiting the sparsity of network admittance matrix. IEEE Trans. PA&S, Dec. 1963.
- [9]. Duff, I. S. A survey of sparse matrix research. Proceedings of the IEEE 65, pp. 500-535.
- [10].Madrigal, M. Coria, L. Uso de asignación dinámica de memoria para el manejo y solución de sistemas de ecuaciones lineales dispersos. Novena reunión de verano de potencia RVP’96 del IEEE. 21 al 26 de julio de 1996. Tomo II, Págs. 40-45.